

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Societatea de Științe Matematice din România

Primul test de selecție pentru BMO și IMO – Seniori
Timișoara, 1 mai 2008

Subiectul 1. Fie n întreg, $n \geq 2$. Determinați mulțimile A de n numere întregi cu proprietatea că suma elementelor oricărei părți nevide a lui A nu se divide cu $n + 1$.

Subiectul 2. Fie a_1, a_2, \dots, a_n și b_1, b_2, \dots, b_n numere reale astfel încât $a_i < b_i$, pentru orice $i = 1, \dots, n$, și $b_1 + b_2 + \dots + b_n < 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Arătați că există $c \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că oricare ar fi $i = 1, \dots, n$ și $k \in \mathbb{Z}$

$$(a_i + c + k)(b_i + c + k) > 0.$$

Subiectul 3. Un hexagon convex $ABCDEF$ are toate laturile de lungime 1. Demonstrați că una dintre razele cercurilor circumscrise triunghiurilor ACE și BDF are lungimea cel puțin 1.

Subiectul 4. Arătați că există o mulțime S de $n - 2$ puncte situate în interiorul unui poligon convex P cu n laturi, astfel încât interiorul oricărui triunghi determinat de trei vârfuri ale poligonului P să conțină exact un punct din S .

Subiectul 5. Determinați cel mai mare divizor comun al numerelor

$$2^{561} - 2, 3^{561} - 3, \dots, 561^{561} - 561.$$

Timp de lucru: 4 ore
Toate subiectele sunt obligatorii.